数理解析研究所講究録
307巻 1977年 46-59

振動型積分変換の L^2 有界性とその応用.

東大 理. 浅田健嗣
藤原大輔

§1. 序

$\nu \geq 1$ をパラメーターとする, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に作く積分変換で

$$(1) \qquad A(\nu)f(x) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{m+n}{2}} \iint_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} a(x,\theta,y)\, e^{i\nu\phi(x,\theta,y)} f(y)\,dy\,d\theta$$

の型のものを考える. Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^n)$ で, 有界線型作用素を定義するための十分条件を求め, $\nu \to \infty$ のときの漸近的様子を調べておく。

Ex. 1. $m = 0$ のとき, Fourier 変換.

$$\hat{f}(y) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\nu x\cdot y} f(x)\,dx$$

Ex 2. $m = n$, $a(x,\theta,y) \equiv 1$, $\phi(x,\theta,y) = (x-y)\cdot\theta$

$$f(x) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{n} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i\nu(x-y)\cdot\theta} f(y)\, dy\, d\theta$$

Ex. 3.　$m=n$.　$\phi(x,\theta,y) = (x-y)\cdot\theta$ のとき擬微分作用素。

$$A(\nu) f(x) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{n} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} a(x,\theta,y)\, e^{i\nu(x-y)\cdot\theta} f(y)\, dy\, d\theta$$

となる。

Ex. 4.　Eskin の例. [5]　$m=n$,　$\nu=1$.

$\lambda(x,\xi)$ は ξ につき斉次一次の実 C^∞ 関数,　$\phi(x,\theta,y)$ は,

Eiconal eq.

$$\phi_t - \lambda(x, \phi_x) = 0$$

$$\phi|_{t=0} = (x-y)\cdot\theta$$

の解, $\phi(t,x,\theta,y)$ で t はパラメターとみなす。(十分小)　$a(x,\theta,y)$ は

y に依らず, $\exists r \geq 0$.

$$|\partial_x^\alpha a(x,\theta)| \leq C(1+|\theta|)^r$$

という評価をみたし,　x につき compact support.　このとき

$$\|A(\nu) f\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2}$$

を示した.

Ex. 5.　Eskin [6] $\nu=1$.　$m=0$,　$\phi(x,y)$ は y につき斉次一次. 実数値をとる C^∞ 関数で, $(y \neq 0)$

(a)　$|\partial_x^\alpha a(x,y)| \leq C(\alpha)$,

(b) $\exists N>0$, 計 $|x|\geqq N \Rightarrow a(x,y)\equiv a(\infty,y)$.

(c) $\left|\det \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}(x,y)\right| \neq 0$. $\forall y$

この下で

$$\|A(\lambda)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad (\lambda = 1)$$

を示した.

Ex 6. Hörmander [10] $\phi(x,\theta,y)$は θにつき斉次一次の $C^\infty(\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^N\setminus 0)\times\mathbb{R}^n)$ の実数値関数で,

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}(x,\theta,y), & \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial\theta}(x,\theta,y) \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta\partial y}(x,\theta,y) & \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta\partial\theta}(x,\theta,y)\end{pmatrix} \neq 0$$

かつ $a\in S^0_{\rho,1-\rho}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^n)$, $\rho>\frac{1}{2}$ のとき,
$\forall K, K'$という $\mathbb{R}^n$ の2つのコンパクト集合に対し, $\exists C>0$があって, fの台がK'に含まれるなら

$$\|A(\lambda)f\|_{L^2(K)} \leq C\|f\|_{L^2(K')} \qquad (\lambda = 1)$$

を示した.

Ex 7. 熊ノ郷[12]は早くからFourier積分作用素のL^2有界性について研究を発表した。最近の結果によると, [12], EskinとHörmanderの結果についてまとっていた条件, $a(x,\xi,y)=a(\infty,\xi,y)$ という条件を除いた。

$a \in S^{0}_{\rho\delta}$, $\rho \geqq \delta$ で良い。 しかし $\phi(x, \xi, y)$ は，$(x-y)\cdot\xi$ から，あまり離れてはならない。 として，

$$\|A(\nu)f\|_{L^2} \leqq C\|f\|_{L^2} \qquad (\nu = 1)$$

という評価を，f の台の有限，~~無~~限に関わらず，証明している。

Ex 8　藤原[7] は，はじめて，パラメーター ν を導入した。 そして ~~$\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$~~ $m = 0$. 即ち $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ で実数値をとり，次の仮定をみたすものとした。

(A)　$\Phi(x, y, z) = \left|\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, z)\right|$

$\Psi(x, y, z) = \left|\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial \phi}{\partial y}(z, y)\right|$

とおく。 正値関数 $\Xi_1(x, y, z)$, $\Xi_2(x, y, z)$, $\theta(t)$ があり，

$\Phi(x, y, z) \geqq \Xi_1(x, y, z)\,\theta(|y-z|)$

$\Psi(x, y, z) \geqq \Xi_2(x, y, z)\,\theta(|x-z|)$

であり，ある正数 $\delta > 0$ があり $\Xi_j(x, y, z) \geqq \delta$, $(j = 1, 2)$ であり，また他の $\sigma > 0$ について $\theta(t) \sim t^\sigma$ $(t \to \infty)$ と仮定する。

(B)　$\forall \alpha$, $|\alpha| \geqq 2$ に対し

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha (\phi(x, y) - \phi(x, z))\right| \leqq C\,\Phi(x, y, z)$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha (\phi(x, y) - \phi(z, y))\right| \leqq C\,\Psi(x, y, z)$$

$$(C)\ \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}(a(x,y)\,a(x,z))\right| \leq C\,\Xi_1(x,y,z)^{|\alpha|}$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha}(a(x,y)\,a(z,y))\right| \leq C\,\Xi_2(x,y,z)^{|\alpha|}.$$

これらの仮定 (A),(B),(C) がみたされるとき,

$$\|A(x)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

を示した。

ここでは,(1) という積分変換に次の仮定を置く.

(A-I) ϕ は実数値の $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ で C^∞ の関数.

(A-II) $\exists\delta_0>0$, $\forall(x,\theta,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ において,

$$|\det D(\phi)(x,\theta,y)| \geq \delta_0$$

が成立する。 ただし, $D(\phi)(x,\theta,y)$ は次の関数行列.

$$D(\phi)(x,\theta,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}(x,\theta,y), & \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial\theta}(x,\theta,y) \\ \\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial\theta\partial y}(x,\theta,y) & , \dfrac{\partial^2\phi}{\partial\theta\partial\theta}(x,\theta,y) \end{pmatrix}$$

(A-III) 行列 $D(\phi)(x,\theta,y)$ の各成分は L. Schwartz [16] の意味で $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)$ の元.

(A-IV). $a\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)$.

この仮定 (A-I),(A-II), (A-III), (A-IV) をおくと,

$$\| A(\nu) f \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqq C \| f \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad {}^\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

という評価が、　　　　　　成立する。　従って.

$A(\nu)$ は, $L^2(\mathbb{R}^n)$ の有界線型作用素を定める。

§2. 定理.

積分 (1) は, 一般には絶対収束しない。 はじめに, 積分 (1) の意味を, はっきりさせる。

定義. 関数列 $\{\omega_\nu(x, \theta, y)\}_{\nu=1}^\infty$ が, 1 の近似列であるとは, $\{\omega_\nu\}$ が $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ で有界集合をなし, 各々の $\omega_\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ で $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ で

$$\lim_{\nu \to \infty} \omega_\nu(x, \theta, y) = 1 \qquad \text{であること、とする。}$$

これを用いて

$$(2) \qquad A_k(\nu) f(x) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{m+n}{2}} \iint_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} a(x, \theta, y)\, \omega_k(x, \theta, y) f(y)\, dy\, d\theta$$

$$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

とおく。

定理 1. (A-I) から (A-IV) が成立すると仮定するならば、$^\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し、1の近似列のとり方によらず、

$^\exists A(\nu)f(x) = \lim_{k\to\infty} A_k(\nu)f(x)$ が各 $x \in \mathbb{R}^n$ において存在し、Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^n)$ の意味で強収束

$$A(\nu)f = s\text{-}\lim_{k\to\infty} A_k(\nu)f$$

が成立する。

定理 2. (A-I) から (A-IV) が成立すると仮定すれば、$^\exists C>0$, $^\forall \nu \geq 1$, $^\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し

$$\|A(\nu)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

という評価が成立する。

$\nu \to \infty$ のときの様子を記述するには、Hörmander 及び Maslov の仕事が指針となった。

定義 2 $C_\phi = \{(x,\alpha,y) \mid \frac{\partial\phi}{\partial\alpha}(x,\alpha,y) = 0\}$

とおく。

$$\Lambda_\phi = \{(x,y,d_x\phi,-d_y\phi) \mid (x,\alpha,y)\in C_\phi\}.$$

とすると、Λ_ϕ は、$T^*\mathbb{R}^n \longrightarrow T^*\mathbb{R}^n$ の正準変換のグラフとなる。そこで、Hörmander にならって Λ_ϕ 上 $\Omega_{1/2}\otimes L$ の切断となる、$A(\nu)$ の主表象 $\sigma(A(\nu))$ を定義する。

Λ_ϕ と この主表象が $\nu\to\infty$ のときの $A(\nu)$ の振舞いを本質的に決定する。 すなわち、

定理3.

$$A_1(\nu)f(x)=\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{m+n}{2}}\iint_{R^m\times R^n} a_1(x,\theta,y)\,e^{i\nu\phi_1(x,\theta,y)}f(y)\,dy\,d\theta$$

$$A_2(\nu)f(x)=\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{m'+n}{2}}\iint_{R^{m'}\times R^n} a_2(x,\tilde\theta,y)\,e^{i\nu\phi_2(x,\tilde\theta,y)}f(y)\,dy\,d\tilde\theta$$

が共に (A-I)〜(A-IV) の条件をみたすとする。 しかも

$\Lambda(\phi_1)=\Lambda(\phi_2)$ かつ $\sigma(A_1)=\sigma(A_2)$ であり、$\Lambda(\phi)$ が有限性条件 (L) をみたすならば、 ある定数 $\gamma\in R$ と、ある定数 $C>0$ があって、$\forall\nu$, f に対し

$$\|A_1(\nu)f-e^{i\nu\gamma}A_2(\nu)f\|_{L^2(R^n)}\le C\nu^{-1}\|f\|_{L^2(R^n)}$$

有限性の条件 L とは、次の如くである。

χ を $\Lambda(\phi)$ に対応する正準変換とする。

$$\chi:(x,\xi)\longrightarrow(y,\eta)$$

とする。$\forall K\subset\{1,2,\dots,n\}$ に対し、母関数として (x_{K^c},ξ_K) の関数がとれるところを V_K とする。 有限性の条件 L というのは、この V_K が有限個の sheets からなっていること。

§3 応用,

ある $\delta>0$ があって $|a(x,\theta,y)|\geq\delta>0$ とする。このとき $B(\nu)$ を適当に(1)の形の変換にとると、

$$A(\nu)\cdot B(\nu) = I + R(\nu)$$

で $\|R(\nu)\| \leq C\nu^{-1}$ に出来る。

従って十分 ν が大きいと $A(\nu)^{-1}$ が存在する。

とくに $a(x,\theta,y)\equiv 1$ のとき、ν が十分大きいと、ある unitary operator $U(\nu)$ があって

$$\| U(\nu) - A(\nu) \| \leq C\nu^{-1}$$

に出来る。

このことは、"正準変換にはユニタリ作用素が対応する" という、有名な量子力学の原理に符合している。

§4 証明の概略.

定理2の証明のみを概説しよう。

$$\varphi \in \mathcal{D}(R^n), \quad \int \varphi(x)\,dx = 1,$$

$$\psi \in \mathcal{D}(R^m), \quad \int \psi(\theta)\,d\theta = 1$$

とする。

$(s, \sigma, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ に対し、

$$a_{s\sigma t}(x, \theta, y) = a(x, \theta, y)\,\varphi(x-s)\,\psi(\theta-\sigma)\,\varphi(y-t)$$

とおき、

$$A_{s\sigma t}(\lambda) f(x) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{m+n}{2}} \iint a_{s\sigma t}(x, \theta, y)\, e^{i\lambda\phi(x,\theta,y)} f(y)\, dy\, d\theta$$

とすると、

$$A(\lambda) f(x) = \iiint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} A_{s\sigma t}(\lambda) f(x)\, ds\, d\sigma\, dt$$

である。

$p = (s, \sigma, t)$, $A_{(s\sigma t)}(\lambda) = A_p(\lambda)$ と書く。

次の Cotlar - Stein の補助定理 (Calderón - Vaillancourt) を用いる。

補助定理 (Cotlar - Stein)

(i) $\|A_p(\lambda)\| \le C$ となる正定数 C がある。

(ii) 正数値をとる関数 $h(p, p')$ があって

$$\|A_p^*(\lambda) A_{p'}(\lambda)\| \le h(p, p')^2$$

$k(p, p')$

$$\|A_p(\lambda) A_{p'}^*(\lambda)\| \le h(p, p')^2$$

が成立し、 $\sup_p \int h(p, p')\, dp' \le C$ $\sup_{p'} \int h(p, p')\, dp \le C$

が成立すれば

$$\|A(\lambda) f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

が成立する。

このCotlar–Steinの補助定理の仮定 i) ii) が成立することを確めれば良いのだが、そのために次の補助定理を用いる。これがすべての評論の基本となる定理で~~あ~~ある

補助定理. (A–I),(A–II),(A–III)が成立するとき写像.

$$(x,\theta,y) \longrightarrow (z,\eta,y), \quad z=\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,\theta,y),\ \eta=\frac{\partial\phi}{\partial\theta}(x,\theta,y)$$

は $R^{m+2n} \longrightarrow R^{m+2n}$ の大域的微分同相を与える。しかもある正定数 δ' があって 2つの評価.

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,\theta,y)-\frac{\partial\phi}{\partial y}(x',\theta',y)\right|^2+\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\phi(x,\theta,y)-\frac{\partial\phi}{\partial\theta}(x',\theta',y)\right|^2$$
$$\geqq \delta'(|x-x'|^2+|\theta-\theta'|^2)$$

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,\theta,y)-\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,\theta',y')\right|^2+\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\phi(x,\theta,y)-\frac{\partial}{\partial\theta}\phi(x,\theta',y')\right|^2$$
$$\geqq \delta'(|y-y'|^2+|\theta-\theta'|^2)$$

が成立する。

これは、良く知られた、大域的陰関数定理を用いれば得られる。

補助定理の意味するところは、因子 $e^{i\lambda\phi(x,\theta,y)}$ が、(x,θ,y) が変化すると、速く振動する、ということを、保証している。

証明の詳細、及び、これらの定理から導びかれる結果、
及び、擬微分作用素との合成法則については、
我々の論文[ ]を参照されたい。

文献は、次ページにある。

References

[1] Asada, K. and Fujiwara, D., On the boundedness of integral transformations with rapidly oscillatory kernels. J. Math. Soc. Japan, vol.27, 1975 pp 628-639.

[2] Birkhoff, G. D., Quantum mechanics and asymptotic series, Bull. Amer. Math. Soc., 39 (1933), 681-700.

[3] Calderón, A. P. - Vaillancourt, R., A class of bounded pseudo-differential operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 69 (1972), 1185-1187.

[4] Dirac, P., The principle of quantum mechanics. Third edition. 1947 Oxford,

[5] Eskin, G. I., The Cauchy problem for hyperbolic systems in convolution, Mat. Sbornik, 74 (1967), Translation: Math. USSR Sbornik, 3 (1967), 243-277.

[6] ——— , Degenerate elliptic pseudo-differential equations of prinicpal type, Mat. Sbornik, 82 (1970), Translation: Math. USSR Sbornik, 11 (1970), 539-582.

[7] Fujiwara, D., On the boundedness of integral transformations with rapidly oscillatory kernels, Proc. Japan Acad. 51 (1975), 90-99.

[8] ——— , Fundamental solution of partial differential operators of

Schrödinger's type, I, Proc. Japan Acad. 50 (1974), 566-569, II, 699-701.

[9] ——— , Construction of the fundamental solutions of Schrödinger's equation on the sphere, To appear in J. Math. Soc. of Japan.

[10] Hörmander, L., Fourier integral operators, Acta Math. 127 (1971), 79-18

[11] ——— , Oscillatory integrals and multipliers on FL^p, Arch. för Math. vol 1. (1973) pp 1-11.

[12] Kumanogo, H., A calculus of Fourier integral operators on $\mathbb{R}^n$ and the fundamental solution for an operator of hyperbolic type, Communications in partial differential equations.

[13] Lax, P. D., Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke Math. J. 24 (1957), 627-646.

[14] Leray, J., Solutions asymptotiques des équations aux dérivées partielles Séminare Leray, Collège de France, 1972.

[15] Maslov V.P., Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, (Russian French translation, Dunod. (1972)

[16] Schwartz, L., Théorie des distributions, Hermann, Paris. 2ed. (1970

[17] Schwartz, J. T., Nonlinear functional analysis, Gordon-Breach, New Yor 1969.

[18]. Asada. Fujiwara, On some oscillatory integral transformations in $L^2(\mathbb{R}^n)$.
日本数学会 Jour に投稿中.